

五南出版

微積分
初學者的福音

白話微積分



作者：卓永鴻

本書特色

- ★ 內容深入淺出，適合自學
- ★ 例題解答步驟詳細
- ★ 指出學習盲點

試閱本

10.1 極坐標簡介



■ 10.1 極坐標簡介

我們平常所慣用的直角坐標系，是由笛卡兒所提出的，因此又叫笛卡兒坐標系。它的原理就好像，你自己是原點，當我問你西瓜在哪裡，你就說：「西瓜在我往東四步、往北三步的地方。」於是笛卡兒坐標就寫成 $(4, 3)$ 來表示西瓜的坐標。

笛卡兒坐標當然是非常好用的，但它其實跟我們日常習慣有點不一樣。我們判斷物品與我們的相對位置時，通常是看它方位在哪、距離我們多遠。所以你可能改回答：「在我的朝北 53° 東方向看，前方五步的地方。」於是現在可能就會改寫成 $(5, 53^\circ)$ 。像這樣寫，便是**極坐標** (polar coordinates) 的想法。標上與原點的距離，以及方向，寫成 (r, θ) 。

不過，以上只是稍微演示一下其概念，與實際極坐標的標法有點不同。極坐標上在標方向的時候，我們並不是看它和北邊夾幾度角，而是它和 x 軸正向夾幾度角。所以前述例子，若要以正確的極坐標寫法，應該要寫成 $(5, 37^\circ)$ 。所以極坐標 (r, θ) ，是分別透露了該點距離原點有多遠、該點與原點連線後與 x 軸正向夾幾度角。簡單標三個點以作演示： $A(2, 30^\circ), B(3, 135^\circ), C(1.5, 220^\circ)$

圖10.1是畫在極坐標圖上面，描點的時候就可以較方便地找出 r 、 θ 的位置。不過，即使我們是直接在直角坐標圖上畫，或是自己在空白紙上手描，也並不很麻煩，只要大略地抓一下距離及角度就好了。

如果先有一個點的直角坐標，要如何轉換成極坐標呢？舉例來說，若 P 點的直角坐標是 $(\sqrt{3}, 1)$ ，我們先將 P 點及 r 、 θ 標出來：

r 是 P 點到原點距離，所以是 2。至於 θ ，當然，根據我們對此特殊三角形的認識，知道是 $\frac{\pi}{6}$ 。不過為了解說，我當作不知道。直角坐標與極坐標之間的關係，從圖中可看出來，為

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (10.1)$$

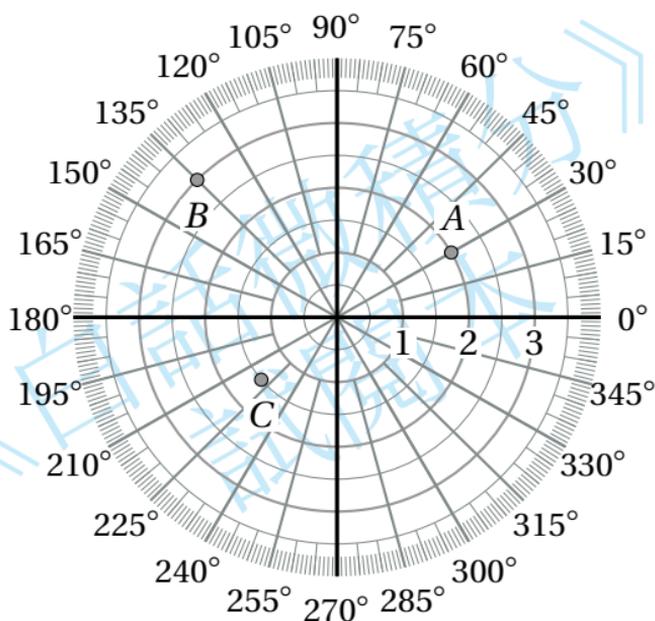


圖 10.1: 極坐標圖

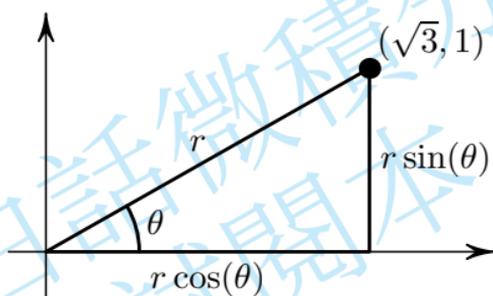


圖 10.2: 直角坐標系轉換極坐標

還可以將上下式作相除，得到

$$\frac{y}{x} = \tan \theta$$

所以回到剛剛問題中，我們知道

$$\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

於是 θ 可能是 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{7\pi}{6}$ ，但由於 x, y 都是正的，我們知道 θ 顯然是第一象限角，所以應該是 $\frac{\pi}{6}$ 。這樣便轉換完畢，直角坐標中的 $(\sqrt{3}, 1)$ 轉換成極坐標以後是 $(2, \frac{\pi}{6})$ 。

性質 10.1.1

直角坐標 (x, y) 與極坐標 (r, θ) 之間的轉換關係為

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

極坐標的基本概念應不難懂，然而有幾個須注意的地方，以下這幾個特性使得同一個點可以有很多個不同的極坐標表示。

首先，原點距離原點是 0，所以在極坐標中，原點的 r 就是 0。至於 θ ，則寫多少都可以。所以在極坐標中， $(0, 12^\circ) = (0, 213^\circ) = (0, 65^\circ)$ 。

另一個要注意的是，由於同界角^①的關係，所以 $(2, 17^\circ) = (2, 377^\circ) = (2, -343^\circ) = (2, 737^\circ) = \dots$ 。角度的部分任意加減 360° 的整數倍，都表示同一個點。

不只如此， r 也有正負號的問題。比方說曹植在你東邊距離七步，你當然可以說：「曹植在我往東看，前方七步。」然而你卻也可以這樣講：「曹植在我往西看，後方七步。」這樣講是有點奇怪，誰沒事會像這樣子講話？但這樣的描述卻也是正確的，當你面向西時，他的確在你的後方七步。

暫且別管曹植了，他不會走過來。我的意思是說，同樣的位置，你可以把 r 多個負號，則 θ 就多 180° 。 $(7, 0^\circ)$ 這個坐標，與 $(-7, 180^\circ)$ 這坐標，是同一個點！講得更一般一點， (R, α) 與 $(-R, \alpha + \pi)$ ，會是同一個點！所以 $(3, \frac{\pi}{4}) = (-3, \frac{\pi}{4} + \pi)$ ， $(5, \frac{\pi}{6}) = (-5, \frac{\pi}{6} + \pi)$ 。

將以上討論作個整理：

性質 10.1.2

1. 任意的 θ ， $(0, \theta)$ 都是代表原點
2. 任意整數 k ， $(R, \alpha) = (R, \alpha + 2k\pi)$
3. $(R, \alpha) = (-R, \alpha + \pi)$

同界角

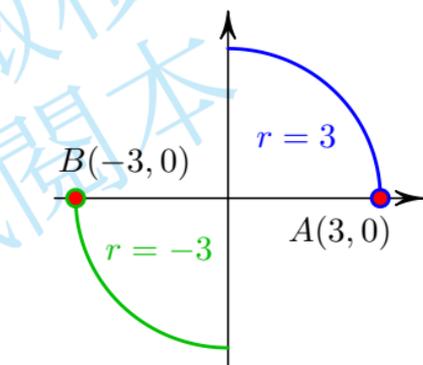
^① 兩角度差了 360° 的 n 倍，等於是差了 n 圈，仍在同一位置。

除了將一個點的直角坐標轉換為極坐標以外，我們還可將一個曲線的直角坐標方程式，轉換為極坐標方程式。先舉個最簡單的例子：圓心在原點，半徑為3的圓。由於圓周上動點，距離原點永遠都是3，這就是說 r 恆等於3。因此這個圓的極坐標方程式，就是 $r = 3$ 。至於說 θ 的範圍，由於動點就繞著原點一圈跑完，可以知道就是 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。

除了上面這個最簡單特例外，我們須知道如何由直角坐標方程式轉換成極坐標方程式。可以利用 $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ 來作代入到這個圓的直角坐標方程式 $x^2 + y^2 = 9$ ，得到 $r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = 9$ 。由於 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ ，故可簡化為 $r^2 = 9$ ，亦即 $r = \pm 3$ 。寫 $r = 3$ 或 $r = -3$ 都可以，理由是前面所提過的， $(R, \alpha) = (-R, \alpha + \pi)$ 。雖然不同的 θ 在二者中代表不同的動點，但所有介於0到 2π 的 θ 繞完以後，都是形成我們的那個圓。

如果你看不太懂，請看右圖。對於 $r = 3$ 這條曲線來說，當 $\theta = 0$ 時，它的動點位在 A 點。而至於 $r = -3$ 來說，當 $\theta = 0$ 時，它的動點位在 B 點。沒錯吧？你往東看時，在你背後三步的地方，便是

你往西看，前方三步處。當 θ 由0開始跑，跑到 $\frac{\pi}{2}$ 。對於 $r = 3$ 這條曲線來說，動點跑出的軌跡是第一象限的部分；對於 $r = -3$ 這條曲線來說，動點跑出的軌跡是第三象限的部分。等到將 θ 從0到 2π 完整跑完以後，動點便完整地跑出一個圓，這兩條曲線就會完全重合了。



再介紹另一種圓： $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 。乘開得到

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

再代 $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, 便有

$$r^2 \cos^2(\theta) - 2r \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = 0$$

利用平方恆等式 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, 可得

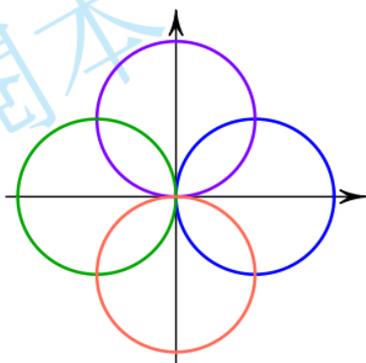
$$r^2 - 2r \cos(\theta) = 0$$

消去 r 以後並移項, 得到

$$r = 2 \cos(\theta)$$

這樣便完成了。

這種圓請你將其極坐標方程式的形式記起來, 因為在大一微積分中很常碰到。所謂的「這種」是指: 圓心在坐標軸上, 並且圓周會通過原點。而這種圓又有上下左右四個情況。這種圓的極坐標方程式的模樣都是



$$r = a \begin{cases} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{cases} \quad (10.2)$$

這種樣子。 $\sin(\theta)$ 或 $\cos(\theta)$ 其中一種, 而 a 又可能正可能負, 這樣 2×2 就正好有四種情形。具體說起來, 上、下、右、左的極坐標方程式分別為 $r = a \sin(\theta)$, $a > 0$, $r = a \sin(\theta)$, $a < 0$, $r = a \cos(\theta)$, $a > 0$, $r = a \cos(\theta)$, $a < 0$ 。記憶的訣竅很簡單: \cos 和 x 有關、 \sin 和 y 有關, 所以方程式中有 \cos 的就是圓心在 x 軸上、有 \sin 的就是圓

心在 x 軸上。若 a 是正的，圓心就在 x 軸正向或 y 軸正向；若 a 是負的，圓心就在 x 軸負向或 y 軸負向。

最後還有一件很重要的事必須交代！就是 θ 的範圍！許多初學者會以為，這是圓嘛！那當然就是一圈，0 到 2π 。不是這樣的！所謂的 θ ，是動點拉到原點後，這條拉出來的線與 x 軸正向所夾的角。所以當我們面對 $r = 3$ 這個圓，我們並不是因為「這是個圓，動點跑了一圈」這樣的理由而說 θ 是從 0 到 2π 。而是因為「動點繞了原點跑整整一圈」才說 θ 是從 0 到 2π 。而我們現在面對的這個圓，它並沒有繞原點跑一圈嘛！

$r = \cos\theta$ 這個圓， θ 是 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 。你可以背起來，以下闡釋原因。

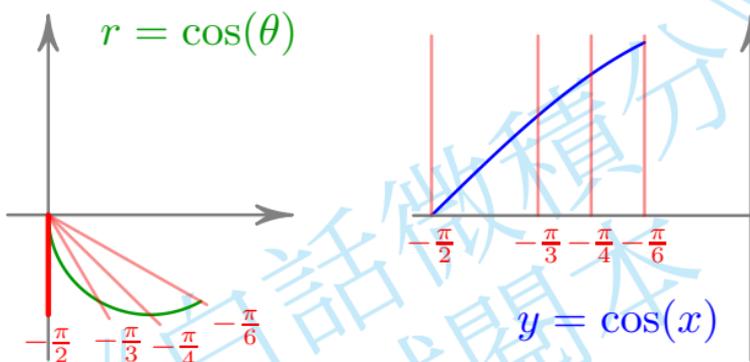


圖 10.3: 配合直角坐標系畫極坐標圖

首先解 $\cos(\theta) = 0$ 得 $\pm\frac{\pi}{2}$ ，先從 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 出發，觀察隨著 θ 變動， r 跟著如何變動。當 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ， $r = 0$ ，動點在原點。 θ 開始增加， r 也從 0 遞增。隨著 θ 在第四象限角越來越大，動點離原點越來越遠。參考圖 10.3。

動點繼續跑到 $\theta = 0$ 時，達到 $\cos(\theta)$ 的極大值，此時離原點是最遠了。接下來 θ 要進入第一象限角， $\cos(\theta)$ 開始遞減。跑到 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 時，動點形成的軌跡如圖 10.4。等到動點跑到 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時， r 又回到 0，就跑完一整個圓了！

如果我們讓 θ 繼續增加，就來到第二象限。 $\cos(\theta)$ 取第二象限角是負的，由 0 遞減到 -1 。所以當方向是朝第二象限看的時候，動點是在背後，也就是第四象限。

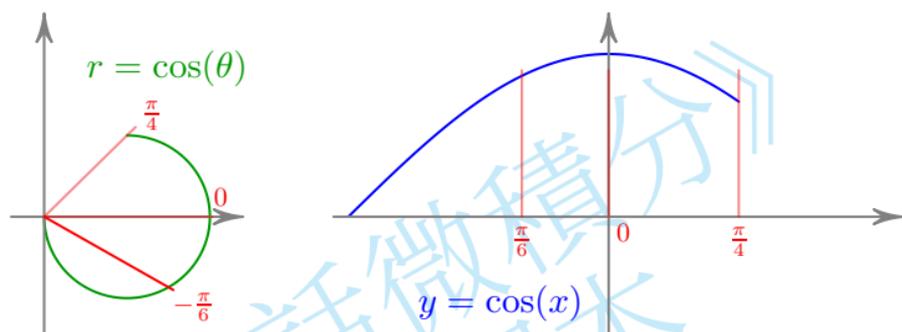


圖 10.4: 配合直角坐標系畫極坐標圖

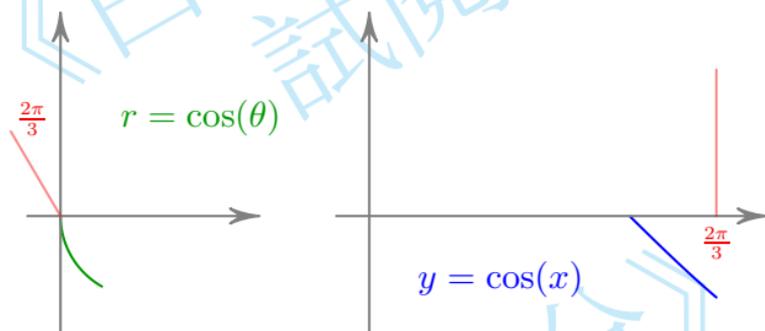


圖 10.5: 配合直角坐標系畫極坐標圖

若 θ 從 $\frac{\pi}{2}$ 跑到 $\frac{3\pi}{2}$ ，會再跑完一次完整的圓。但這已經是將同樣的路徑跑第二遍啦！所以 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ 的部分不須要列進來。

類似的手法，當我們看到 $r = 5\sin\theta$ ，可分析出它是位於上方， θ 的範圍是 0 到 π 。

再來看一個常見的曲線：心形線。它的極坐標方程式是 $r = 1 - \cos(\theta)$ ，長相如圖 10.6(a)。

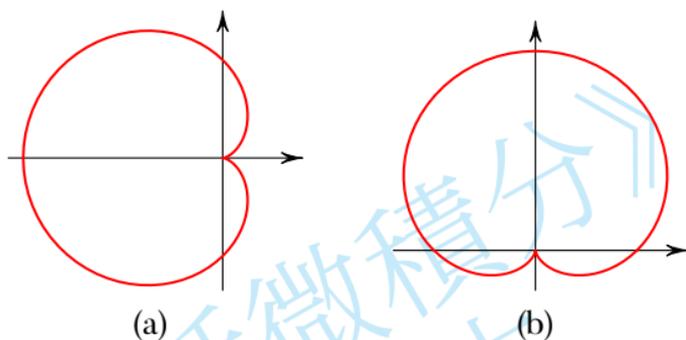


圖 10.6: 心形線

有點像愛心，所以我們稱之為**心形線** (cardioid)。心形線也會有上下左右四個方向。譬如說 $r = 1 + \sin(\theta)$ ，

方向如圖 10.6(b)。

心形線方程式的形式是

$$r = a \left(1 \pm \begin{cases} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{cases} \right)$$

取正負號、取 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$ ，這樣一共就 $2 \times 2 = 4$ 種。至於外面乘個常數 a ，只不過是圖形的伸縮。哪個方向配哪個方程式，我們可以注意愛心的底部。如果方程式中有 \cos ，底部就位於 x 軸上，若有 \sin ，底部就位於 y 軸上。 \pm 那邊若取正號，底部就在 x 軸正向或 y 軸正向；若取負號，底部就在 x 軸負向或 y 軸負向。至於 θ 的範圍，動點會繞原點一圈，所以 θ 是 0 到 2π 。

曲線的極坐標方程式，並不見得都會是 $r = r(\theta)$ 的形式。譬如說 $y = x$ 這條直線，就寫成 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。仔細一看，沒錯嘛，任意的實數 r 配上 $\frac{\pi}{4}$ ，的確就形成 $y = x$ 這條直線出來。當然我們也可以和前面一樣，代 $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$ ，得到 $r \sin\theta = r \cos\theta$ 。接著消去 r 並且移項，得到 $\tan\theta = 1$ ，而這便等同於 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。或是你要寫 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 之類的，都可以，都會是同一條 (why?)。甚至極坐標的方程式也可以長這樣

$$r^2 = \cos(2\theta)$$

例題 10.1.1

將下列直角坐標方程式轉換為

極坐標方程式：

$$(1) x^2 + y^2 = 9 \quad (2) x^2 + (y - 4)^2 = 16$$

$$(3) x = 3 \quad (4) 2x + y = 4$$

解

- (1) 這是以原點為圓心、半徑為 3 的圓，故顯然其極坐標方程式為 $r = 3$ 或 $r = -3$ 。

若代 $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$ 得

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)$$

$$= r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3。$$

- (2) 這是圓心在 y 軸上且通過原點的圓，是 $r = a \sin(\theta)$ 的形式。

圓心位於 y 軸正向，且直徑為 8，故 $a = 8$ ，其極坐標方程式為 $r = 8 \sin(\theta)$ 。

若欲代 $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ ，可先乘開為

$$x^2 + y^2 - 8y = 0, \text{ 此時再代得}$$

$$r^2 - 8r \sin(\theta) = 0 \Rightarrow r = 8 \sin(\theta)。$$

- (3) $r \cos(\theta) = 3 \Rightarrow r = 3 \sec(\theta)$

(4) $2r \cos(\theta) + r \sin(\theta) = 4 \Rightarrow r = \frac{4}{2 \cos(\theta) + \sin(\theta)}$

例題 10.1.2

將下列極坐標方程式轉換為直角坐標方程式：

(1) $r = -6 \cos(\theta)$ (2) $r^2 = 6 \sin(2\theta)$

(3) $r = \frac{3}{2 + \cos(\theta)}$

解

- (1) 這是圓心在坐標軸上且會通過原點的圓，由 \cos 及 $a = -6 < 0$ 看出圓心位於 x 軸負向、半徑為 $\frac{6}{2} = 3$ ，所以其直角坐標方程式為 $(x+3)^2 + y^2 = 9$ 。若要利用 $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ ，可先等號兩邊同乘以 r 得到 $r^2 = -6r \cos(\theta)$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = -6x \Rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 9。$$

- (2) $r^2 = 6 \sin(2\theta) = 12 \sin(\theta) \cos(\theta)$

$$\Rightarrow r^4 = 12(r \sin(\theta))(r \cos(\theta))$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 12xy$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad r(2 + \cos(\theta)) &= 3 \Rightarrow 2r = 3 - r \cos(\theta) \\
 &\Rightarrow 4r^2 = (3 - r \cos(\theta))^2 \Rightarrow 4(x^2 + y^2) = (3 - x)^2 \\
 &\Rightarrow 3x^3 + 6x + 4y^2 - 9 = 0
 \end{aligned}$$

接下來介紹極坐標當中的對稱。先回憶一下在直角坐標的情況，如果將 $-x$ 代到方程式中的 x ，代完方程式仍長一樣，則其圖形會對 $x=0$ ，也就是 y 軸對稱。一個例子是拋物線 $y=x^2$ 。類似地，若將 $-y$ 代到方程式中的 y ，結果方程式仍長一樣，便知圖形會對 $y=0$ ，也就是 x 軸對稱。一個例子是雙曲線 $y^2 - x^2 = 1$ ，它同時也對 y 軸對稱。而如果同時將 $-x, -y$ 分別代到方程式中的 x, y ，結果方程式仍長一樣。我們說這是對原點對稱，就是說把圖形繞著原點轉 180° 後，圖形還是長一樣。例如 $y = \sin x$ 。如果把方程式中的 x 和 y 交換後，結果方程式仍長一樣。這種情況就是圖形對於 $y=x$ 這條線對稱。例如圓 $x^2 + y^2 = 1$ ，它也同時包含了上述所有對稱，相當完美。

簡述完直角坐標的對稱情況之後，接下來我們討論極坐標的情況。如果說將 $-\theta$ 代入極坐標方程式的 θ ，代完方程式長相不變，我們便知它的圖形對 $\theta=0$ 對稱，即上下對稱。而這件事，又等同於直角坐標中對 x 軸對稱。

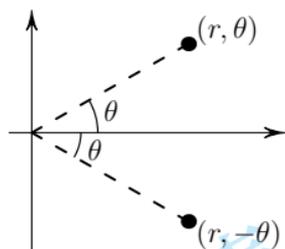


圖 10.7: 上下對稱

那麼，直角坐標中對 y 軸對稱，在極坐標中應該是如何呢？先畫個圖來看看，看起來似乎就是：如果由 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 出發，加減任意 θ 角都對應到相同的 r ，這樣就是直角坐標中對 y 軸對稱。

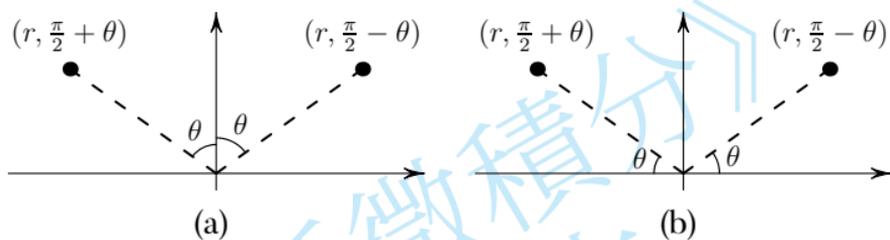


圖 10.8: 左右對稱

不過這樣麻煩了點，這件事怎麼實際應用呢？倒不如像圖10.8 (b)這樣看。將 $\pi - \theta$ 代入極坐標方程式中的 θ ，代完後方程式長相不變，我們便知它的圖形對 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 對稱，即左右對稱。

至於說直角坐標中的奇函數對稱情況：對原點對稱，就是圖形如果繞著原點轉 180° ，轉完後圖形仍長得一樣。那也就是說，隨便抓曲線上某個點出來，把它轉 180° 後，仍然在曲線上。將 $\pi + \theta$ 代入極坐標方程式的 θ ，代完後方程式長相不變，便知它的圖形對原點對稱。前面談過， $(r, \pi + \theta) = (-r, \theta)$ ，所以亦可說成：將 $-r$ 代到極坐標方程式的 r ，代完長相不變，便知其圖形對原點對稱。

性質 10.1.3 極坐標中的對稱情況

若對於任意位在圖形上的點 (r, θ) ，

1. $(r, -\theta)$ 必也在圖形上，則圖形對 $\theta = 0$ 對稱，即上下對稱
2. $(r, \pi - \theta)$ 必也在圖形上，則圖形對 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 對稱，即左右對稱
3. $(r, \pi + \theta)$ 或 $(-r, \theta)$ 必也在圖形上，則圖形對原點對稱

例題 10.1.3

判斷以下曲線的對稱性：

(1) $r = 5 + 4 \cos(\theta)$

(2) $r = \frac{2}{1 + \sin(\theta)}$

(3) $r^2 = 8 \cos(2\theta)$

解

- (1) 看到 $\cos(\theta)$ 知代 $-\theta$ 到原 θ 處後方程式不變，故圖形上下對稱。
- (2) 看到 $\sin(\theta)$ 知代 $\pi - \theta$ 到原 θ 處後方程式不變，故圖形左右對稱。
- (3) 代 $-\theta$ 到原 θ 處、代 $\pi - \theta$ 到原 θ 處及代 $-r$ 到原 r 處，方程式皆不變，故圖形同時有上下對稱、左右對稱、對原點對稱。